

Capítulo 2

Estructuras de información

Para analizar la información de los eventos que ocurren en una realidad definida se necesitan estructuras que organizan la información propia de entes y de la interacción entre estos y su entorno. Siendo la cantidad de cualidades de los mismos a tomar en cuenta, muy variada, obligando a una estructuración acorde a las necesidades que obligue el modelo con que se analiza dicha realidad.

Existen varias formas de guardar información y organizarla para su uso, entre ellas está el uso de pilas, colas, listas, distribuciones en red, estructuras matemáticas, funciones matemáticas y otras. Cada uno de estos contenedores de información, posee características especiales que favorecen ciertos tipos de acceso y tratamiento de la información resguardada por los mismos. Algunos de estos contenedores, restringen el tipo el tipo de información que puede resguardar, siendo sus elementos por lo general de la misma naturaleza. Sin embargo, las listas pueden contener elementos de diferente naturaleza, teniendo la propiedad de ser capaz de almacenar listas internamente, siendo conocidas como listas anidadas. Por ejemplo la **lista A** = ["cama", 1, 2.0], contiene tres elementos de naturaleza o características diferentes, tal que **A0** es una cadena de caracteres, **A1** es un número entero, **A2** es un número real. La **lista B** = [[1,2,3], [4,5,6], [5,6,7]], contiene tres elementos que son listas, que corresponden a listas anidadas.

Una pila es un contenedor de información especial que resguarda información utilizando un puntero denominado "top" que ordena el acceso de agregado a la información y de acceso a la misma. En este sistema de información, la última información entrante a la pila es la que se accede de primero y la primera información ingresada es la última que puede ser accedida. En la temática hiperdimensional, el comportamiento de pilas es un buen modelo para analizar las evoluciones de los entes en sus realidades en términos de los eventos, donde los efectos más visibles son aquellos que se presentan en la última afectación de los entes sin perder el efecto total de las anteriores afectaciones que sufrió el ente por parte del entorno. Es decir, las anteriores afectaciones se mantendrán generando un efecto neto por superposición de las mismas, donde el ente puede tener una capacidad de respuesta para aminorar el efecto de algunas de ellas.

Una cola está formada por una colección de información que se anexa respetando el orden en que la información se agrega a la misma. De manera, que si se tiene la **cola A** = {2, 3, 8, 9}, primero se accede al primero que se anexó que fue el 2, luego este al 3, luego este al 8 y finalmente está el nueve. Este tipo de administración de la información guarda el histórico de lo anexado a la información previa.

Note como en los contenedores de información antes mencionados se utiliza un ordenador que ubica a elementos así como el acceso a los mismos, pues la completitud de la información es de gran valor para la interpretación y uso de la misma. Donde este ordenador que es discreto puede ser indicado a través de un solo índice como en las listas o con varios como en las matrices.

Para definir la evolución de los objetos en su realidad, el modelo del tiempo dimensional, utiliza la creencia de que existe un espacio tridimensional espacial, quizás de dimensiones infinitas, cuyas evoluciones son registradas utilizando un ordenador continuo denominado tiempo, el cual es conceptualizado como un ordenador continuo. Para la mecánica clásica este ordenador es lineal y tiene una solo comportamiento posible, que es el de evolución en un solo sentido. Sin embargo, Einstein modifica dicha concepción, al permitir que el entorno defina el comportamiento del ordenador evolutivo. En realidad, al analizar las ecuaciones de la relatividad especial, se encuentra que el ordenador absoluto es una estructura compleja de información, que involucra tanto a las coordenadas espaciales como a las temporales entrelazadas.

Desde un inicio, con Newton, se emplean estructuras de información para definir una descripción del comportamiento de los objetos. Para Newton, los objetos pueden ser modelados en primera instancia

como una partícula puntual, que es ubicada en $\mathbf{r} = (x, y, z, t)$, que corresponde a una posición espacial para un tiempo determinado. Donde cada uno de esos argumentos son celdas o bloques de información independientes, tal que la variable “ x ” está definida por un valor que pertenece al conjunto de los números reales, al igual que “ y ”, “ z ” y “ t ”. Pero, el conjunto de variables genera una estructura de información completa, que puede ser asociada o representada gráficamente, mostrando que \mathbf{r} , en sí es una entidad objeto de información. Existe una infinidad de posibles valores que pueden tomar dichos números, que pueden ser reducidos a tres, tal que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x(t), y(t), z(t))$, ocultando la variable t . Esta variable “ t ”, no es ni más menos que un ordenador que entrelaza la información entre esas variables, que quedan amarradas, tal que siempre deberá cumplirse $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ y jamás podrá presentarse el caso $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x(t_1), y(t_2), z(t_3))$, las tres variables principales siempre estarán amarradas a su ordenador.

Para el caso de la cinemática res un vector, cuya estructura de información se emplea para definir cantidades complejas de información que requieren definir direcciones para su operatividad y comprensión. El concepto de vector se tratará en un tema posterior, debido a que posee toda un álgebra para su manipulación. El vector puede ser descrito mediante una reducción con índices $\mathbf{r} = \sum r_i \hat{e}_i$, donde los \hat{e}_i se denominan vectores unitarios, cuya misión es indicar una dirección. Para ilustrar su utilización suponga el vector (a, b, c) , es una estructura de datos, que indica la presencia de tres componentes independientes de información, una está etiquetada con el valor “ a ”, otra con el valor “ b ” y otra con el valor “ c ”. Para esta estructura de datos, sus entradas se leerían de la siguiente manera, $A_0 = a$, $A_1 = b$ y $A_2 = c$. Aún si $a = b = c$, lo que representan cada término es algo totalmente diferente a lo del otro, tal y como es diferente moverse tres metros al norte, con respecto a moverse tres metros al oeste o bien tres metros hacia abajo.

La siguiente estructura en complejidad es una tabla plana de información, esta consta de una organización de información tabular usando filas y columnas. Esta estructura resguarda información, que puede ser analizada por columnas o por filas, existiendo posiblemente una relación entre la información asociada a ellas. Para representar una tabla se puede utilizar la notación A_i , para ubicar las hileras de información, mientras que para ubicar una celda de información o elemento de la tabla se puede emplear A_{ij} , siendo el primer índice referenciado a la hilera y el segundo a la columna. De manera que una **tabla A**, puede ser definida por $A = [A_0, A_1, A_2, \dots, A_n]$, donde $A_0 = [A_{00}, A_{01}, A_{02}, \dots, A_{0n}]$, $A_i = [A_{i0}, A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}]$. Por ejemplo si se tiene la estructura de datos $A = ((1,2,3), (3,2,1), (2,3,1))$, A_0 sería igual a $(1,2,3)$, $A_1 = (3,2,1)$ y $A_2 = (2,3,1)$. Para el uso de los datos de la cadena menor se usan los dos subíndices, tal que $A_{00} = 1$, $A_{01} = 2$ y $A_{02} = 3$. Para la otra cadena menor, $A_{10} = 3$, $A_{11} = 2$ y $A_{12} = 1$, al igual para las entradas de la otra cadena menor, $A_{20} = 2$, $A_{21} = 2$ y $A_{22} = 1$.

La siguiente estructura que permite el resguardo de información es el hipercubo de información, el cual es una estructura que contiene tablas, pero que poseen etiquetas que resguardan a tablas de contenido común. En sí, un hipercubo de información es una tabla de tablas, donde las celdas internas guardan otras tablas. Esto permite el resguardo de información histórica de los eventos de cualquier sistema dinámico de información. Es importante recalcar, que esta estructura es la apta para sistemas dinámicos de información, pues las estructuras formadas por tablas ordinarias o planas, no permiten guardar la información de los cambios dinámicos o históricos de la información, sino que la última información borra a la anterior posicionándose en la celda respectiva. Desde el punto de vista de almacenamiento de la información, resulta muy caro el empleo de hipercubos de información, pues cada cambio obliga a replicar toda la información, evento a evento, llegándose inclusive a que los sistemas de almacenamiento de información puedan colapsar.

Información hiperdimensional en red

Dada la complejidad de una completitud de información de un sistema, por lo general la información debe ser resguardada en diferentes puntos, que normalmente contienen un tipo de información. De

manera, que para lograr cierto nivel de completitud de la información, se deben realizar anexos de información de fuentes o puntos de resguardo de la misma. La forma de realizar la integración o indagatoria de la información puede ser mediante un mecanismo que se denomina de transporte, que es el medio mediante el cual se genera una conexión virtual entre los puntos de información.

La naturaleza de interconexión múltiple entre los puntos de almacenamiento información, permite la generación de sub redes especializadas sobre ciertas actividades de la humanidad, por ejemplo se podrían tener subredes dedicadas a seguridad, a salud, mercadeo, ambiente científico y otras.

Desde el punto de vista hiperdimensional, el conjunto total de informaciones lo conforman los multiversos, o inclusive podría ser una membrana o bien una burbuja cósmica, mientras que las sub redes podrían ser los universos n dimensionales. Es decir, una sub red de información podría emular a la información de un universo **XYZ**, otra la emulación de un universo o multiverso **XYZW**, etc., donde podría existir una interacción entre las subredes, que podrían emular al efecto de burbujeo, que permite que cierta información de un universo o multiverso interactúa con la de otro.

El concepto de red es natural, tal que la naturaleza podría ser considerada la red, el cuerpo de un animal podría ser considerada una de las subredes menores, donde en su mismo cuerpo se separa información en nuevas redes menores que tramitan toda la información referente a sus sistemas, circulatorio, respiratorio, etc., todos trabajando en conjunto a través el sistema celular que lo compone. Por ejemplo, el sistema normal restablecerá cualquier efecto sobre el cuerpo como reposición de células, sin que se pierda la integridad del todo, pues la comunicación entre las células debe ser tipo red. Cada sub red de este cuerpo cumplirá ciertas funciones con cierto grado de autonomía, lo cual permite, que el animal observe su entorno, pueda caminar y respirar a la vez, respetándose la autonomía de sus subredes y la integridad de todas como un todo.

Para emular el tipo de multiverso o realidades que menciona la fantasía del libro “**Naturalismo Hiperdimensional**”, se necesita generar una hiperred, que sea capaz de guardar la información naciente de la evolución de los eventos, pues en su propuesta, los multiversos se generan o crean constantemente, dejando una huella de la información de los anteriores estados de realidades consolidadas. Esto obliga a que el efecto Sierpinski se aplique constantemente, de manera, que cuando la realidad aparente muestra un tamaño infinito de su mundo en crecimiento, lo que ocurra es una reducción de lo existe emulando ese agrandamiento, pero en su nueva realidad generada por evolución, durante el enrollamiento entre las membranas donde coexisten, mediante los desdoblamiento globales.

Si los multiversos como contenedores dinámicos de información emulan a hipercubos de redes dinámicas de información, guardarían una estabilidad que permite una infinidad de evoluciones, tal que si una realidad es absorbida por otra mayor, no cambiaría la conectividad de la información de las otras partes del mismo (subredes) pues existen otros mecanismos que no necesitarán dicha subred para resguardar la integridad del nuevo estado evolutivo de los multiversos. Esto no indica que se genere un colapso en alguna subregión del multiverso, simplemente evoluciona en coherencia con el todo, pues el todo es dependiente de todos sus elementos, de manera que cualquier evolución actuará sobre el todo.

El hiperespacio de existencia en las membranas que contienen a los multiversos, es dinámico, de manera que forma una subred muy importante del todo. Durante cada evolución un mecanismo en red debe enviar información al todo, para definir cuales regiones permitidas son generadas para los nuevos desplazamientos. Esta es una restricción muy fuerte que nace de la teoría del modelo basado en eventos, donde no existe ningún elemento puntual, son entes de diversa complejidad los que evolucionan en ese hiperespacio resguardando sus características principales como un todo. Cada evolución obliga a una generación de una infinidad de pozos de potencial que demarcan a las zonas permitidas de existencia, que durante la transición de un desdoblamiento, pertenece al conjunto de zonas permitidas potenciales de existencia, de las cuales solo algunas se llegan a consolidar.

La existencia de múltiples realidades que emplean diferentes ordenadores de eventos con sus respectivas

métricas, genera todo un sinfín de información que se interconecta a través del retículo del hiperespacio permitido, con el fin de asegurar la unicidad de los eventos y la común integración de la información de todos los eventos como un macro evento total, cuya información debe ser transferida al todo. La relación entre las zonas permitidas de existencia de las diferentes realidades, es la que generará la proyección sumativa denominada realidad mayor o de capa, que es la que es visualizada y definida como realidad verdadera, por su respectivo observador.

Una de las ventajas de emplear estructuras de red como mecanismo para la comunicación y resguardo de información, es su naturaleza transparente en el manejo de información diversa con cierta independencia, que cada una de sus celdas de información resguardada en los nodos (centros elementales de información), que puede tramitar información encapsulada muy compleja, de una manera simplificada empleando protocolos para el tratamiento de la misma. De manera, que la teoría orientada a objetos puede emplearse a estas unidades de información donde los métodos equivalen al mecanismo de transferencia de información entre los nodos que resguardan la información total.

Todos los entes que conviven en cualquier realidad, son productos de definiciones genéricas que son sometidos a interacción con su entorno, generan una amalgama que define su unicidad en el todo, donde un pequeño cambio en la interacción con el todo es el responsable de dicha unicidad. Todo átomo nace como una misma definición genérica de información, pero el entorno lo define, mostrando características diferentes, como su número atómico, número de masa y otros, siendo esto normal en la teoría de objetos donde a partir de una definición genérica se crean instancias que pueden ser conceptualizadas con características especiales adquiriendo unicidad. De tal forma, que aún dos átomos supuestamente idénticos guardan su unicidad en el todo, inclusive las partículas entrelazadas guardan su unicidad dentro del mismo. Todos ellos, perteneciendo a una información global que sirve de plantilla para la creación del nuevo estado de una realidad, todo como una red única de información en estado dinámico. Es decir, que define un estado de información del todo, por lo tanto este buscará definir su nueva definición en el todo en base a la misma, por lo cual cada elemento del todo compartirá su información como parte de una gran red de información global.

Estructuras de información difusa

Las estructuras de información evocan a sistemas de almacenamiento de la información, incluyendo los protocolos mediante los cuales es anexada, accedida y utilizada dicha información. La estructura interna de una celda de información puede ser compleja, donde la información, puede ser determinista, probabilística o difusa. Las fantasías matemáticas sobre las cuales la ciencia actual asume un nivel de verdad, pertenecen en su mayoría a la determinista, donde la información o datos mantienen su reinado. Las variables de contenido numérico prevalecen como su reino, donde sus extremidades tecnológicas le permiten a la humanidad recopilar y procesar información dentro de la categoría de los números.

La mecánica clásica y relativista son sumamente deterministas, donde el reino del conocimiento basado en la evolución sobre los puntos y el ordenador tiempo, son los reyes. Mientras que en la mecánica cuántica, aunque mantiene su reinado en las variables numéricas, estas emulan un efecto de incertidumbre entre las mismas, acotando dicha valoración nuevamente entre números. Sin embargo sigue siendo la misma ideología, tal que cualquier partícula tiene una probabilidad de existencia, que puede ser indicada mediante números, es decir siguen siendo valores numéricos. En el caso de la propuesta del modelo basado en los eventos, las variables pueden definir regiones de existencia, donde los posibles estados evolutivos pueden ser descritos por variables deterministas, probabilísticas y difusas y una serie de factores son los que definen si el estado evolutivo deja de ser potencial pasando al estado de consumado. Debido a la naturaleza de la información que maneja el modelo basado en los eventos, los tipos de datos y estructuras organizacionales de los mismos deben analizarse en las categorías determinista, probabilística

y difusa.

Una lista de variables deterministas es una lista de valores ordinarios, por ejemplo, la **lista A** = [3,4,5,6, [2,3,4]] es una lista simple determinista, donde cada celda tiene un valor absolutamente definido. La celda $A_0 = 3$, manteniendo se valor siempre sin ningún cuestionamiento. La celda $A_4 = [2,3,4]$ es una lista anidada determinista, donde sus valores internos no son cuestionables en ningún momento.

Una lista de variables probabilísticas guarda una información más compleja que una determinista, pues para cada celda existe una probabilidad de certeza de dicho valor. Por ejemplo la **lista B** = [3:0.4, 2:0.3, [2,3,4]:0.4] es una lista probabilística donde cada celda guarda un valor y su nivel de certeza de dicho valor. De tal forma, que la celda $B_0 = 3:0.4$, indica que el valor guardado es 3 con un nivel de certeza del cuarenta por ciento. La celda $B_2 = [2,3,4]:0.4$ guarda una lista anidada de elementos deterministas cuya certeza del conjunto de valores es del cuarenta por ciento.

Una lista de valores difusos define un conjunto difuso, es decir su universo de valores puede ser referenciado a una variable lingüística. Una variable lingüística identifica a un conjunto de valores definidos como el universo en discurso, que tienen cierto nivel de pertenencia cada uno. Por ejemplo suponga que bajo cierta condición la variable altura, toma una serie de valores, como “**bajo**”, “**medio**” y “**alto**”. De tal forma que una lista con dichos valores podría ser descrito como $C = [u(x) \mid_{x=0.7}, u(x) \mid_{x=1.1}, u(x) \mid_{x=1.4}, u(x) \mid_{x=1.9}, u(x) \mid_{x=1.3}]$. Estos valores corresponden a los valores probables en discurso de la variable lingüística altura, donde cada uno de ellos posee un conjunto de valores definidos por valores crisp o verdaderos y un nivel de pertenencia indicado por un valor determinista. Ninguno de los valores representa la esencia del valor de la variable lingüística sino que el todo es una información. Tal que, si **bajo** = {1.0/0.3 + 1.1/0.4 + 1.2/0.7 + 1.3/0.5 + 1.4/0.2}, cada entrada es parte de una información total que debe ser valorada respecto al todo, donde cualquier valor de entrada debe ser procesado siguiendo algún conjunto de reglas (inferencia) y definir el valor de salida (defusificación) que indicará como debe ser interpretado el efecto de ese valor de entrada. Es importante mencionar, que el signo “+” que se encuentra entre los valor x y su u(x), no corresponde a la operación suma ordinaria, sino que se indica la presencia de un nuevo término del conjunto de valores de dicha variable difusa.

La anterior lista asociada al valor lingüística “**bajo**”, se lee de la siguiente forma, si se tiene el valor 1.0 con su valor de pertenencia dentro de esa categoría o valor denominada “**bajo**” que es del 30%, lo cual corresponde a la primera entrada de dicho conjunto difuso que define a dicha variable. Esta representación del conjunto de valores con su pertenencia define a la variable en estudio “**bajo**”, pero ninguno de ellos es el que refleja como un todo el valor asociado a dicha variable, sino el todo como un bloque de información. De tal forma, que una lista de valores difusos, contiene una serie de términos lingüísticos que son definidos por conjuntos de valores difusos. Por ejemplo la definición del valor “**alto**” podría ser definido por un conjunto difuso discreto llamado **alto** = {1.3/0.2 + 1.8/0.7 + 1.9/0.9 + 2.0/0.95}. Pero perfectamente alto podría estar definido por una relación de la forma $(x, u(x)) \mid \in U$, que corresponde una definición continua, siendo algunos modelos propuestos: la representación de pertenencia triangular, trapezoidal, de campana y otras. Al igual el valor de “**medio**” podría ser definido en forma discreta por **medio** = {1.2/0.2 + 1.3/0.5 + 1.5/0.6 + 1.7/0.4}.

Observe con detenimiento la definición de los valores difusos de la variable altura, denominados **bajo** y **alto**, por ejemplo para $x=1.3$, $u(x) \mid_{x=1.3}$ se define el valor de salida como 0.3 respecto a bajo, 0.5 respecto a **medio** y 0.2 respecto a **alto**. De manera, que para un $x= 1.3$ m de altura, corresponde a un estado con valor de salida de **alto**, **medio** y **bajo** simultáneamente con su respectiva pertenencia.

Observe la diferencia entre un valor probabilístico respecto a uno difuso, un valor probabilístico está definido por un valor y su probabilidad de certeza, mientras que un valor difuso entra en comunicación con un conjunto de valores difusos para ser interpretado, generando una información entrelazada.

Para el caso de una pila como contenedor de información, podrían ser almacenados valores deterministas y ser utilizados como tales. De manera, que si el último valor de entrada fue 5, al recuperar el primer

valor accesible de la pila, devolverá un valor determinista igual a cinco, el cual no cambia su valor pues es constante quedando absolutamente definido. Pero también se podría guardar en la pila valores probabilísticos, tal que si el último valor a entra es 1.3/0.4, el valor recuperado en primera instancia será de 1.3 con una certeza del cuarenta por ciento. Al igual, si en la pila se anexan valores difusos, el último entrar, será el primer en ser detectado, por ejemplo definido por *alto*/0.3 y *bajo*/0.7, donde dichos valores tienen que interpretarse como una sola información.

A la pila podrían entrar también valores crisp, que al ser recuperados devuelvan un valor difuso, al ser aplicado un protocolo de salida de la pila (inferencia y desfuzificación), donde se mantiene que el último en entrar es el primero en salir.

En el caso de las colas, estas podrían utilizarse como contenedores de información organizada según la entrada del dato a la misma, estando disponible dicha información según la posición de llegada de la misma a la cola. En ella, se puede almacenar información deterministas, probabilísticas y difusas.

Para el caso de estructuras ordinarias como tablas y matrices, también en estas se puede almacenar información determinista, probabilística y difusa. A parte de ello, puede contener operadores que actúan sobre funciones que pueden tratar los tipos de datos antes mencionados.

Representación indicial

Las expresiones matemáticas que se emplea en el ambiente científico o en el ingenieril tienden a ser complejas, por lo cual, es útil emplear codificaciones especiales que ayuden a reducir la apariencia de las mismas y que a su vez permita un tratamiento más expedito de las expresiones en cuestión.

Einstein presenta una notación especial muy estilizada y que permite trabajar expresiones en forma simplificada utilizando índices, que cumplen la condición de sumatoria al existir replicación del mismo índice. Esta notación es aplicable a diferentes tipos de estructuras de datos, desde la aplicación de un vector hasta la de un tensor.

La notación tradicional para representar un vector es $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$, que en primera instancia podría denotarse como $\mathbf{r} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$, donde $a_1 = x$, $a_2 = y$ y $a_3 = z$. Un vector en la notación indicial se puede escribir como $\mathbf{r} = a_i \mathbf{e}_i$, que equivale a $\mathbf{r} = \sum a_i \mathbf{e}_i$.

La suma de vectores según la representación tradicional es $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1) \mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2) \mathbf{e}_2 + (a_3 + b_3) \mathbf{e}_3$, cuya representación en notación indicial es $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_i + b_i) \mathbf{e}_i$.

Un tensor en representación tradicional se puede denotar mediante la expresión $T = v_1 \otimes w_1 \otimes a_1 + v_2 \otimes w_2 \otimes a_2 + \dots + v_n \otimes w_n \otimes a_n$, cuya expresión puede escribirse en notación indicial como $T = T_{pq} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q$, donde $\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q$ conforma diadas y el conjunto sumatorio forma diádicas. Esta expresión indica que se debe sumar sobre los valores posibles de p y q, tal que equivale a $T = \sum \sum T_{pq} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q$.

El producto de vectores especial $\mathbf{a} \mathbf{b} = (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3)(b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3)$, genera un resultado especial formando una estructura diádica, tal que $\mathbf{a} \mathbf{b} = a_1 b_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \dots + a_3 b_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$, lo cual puede escribirse como $\mathbf{a} \mathbf{b} = a_p b_q \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q$.

Para los vectores existen tres tipos de productos muy conocidos debido a su aplicabilidad, que son: producto escalar utilizado para calcular proyecciones, producto vectorial empleado para calcular áreas y producto mixto para determinar volúmenes, especialmente en celdas unitarias. Para el caso del producto escalar, su definición es $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, que puede denotarse en notación indicial, como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$. Esta expresión equivale a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum a_i b_i$, donde la sumatoria se indica mediante la repetición de índices. Para el caso del producto vectorial de vectores, se debe utilizar un operador generado a partir de una función reducida denominada delta de Kronecker ε_{ijk} . La definición en la representación tradicional del producto vectorial es $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \times (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3)$, mientras que en la notación indicial, se reduce a $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \varepsilon_{kpq} a_p b_q \mathbf{e}_k$.

Para el caso de los tensores, existen varias operaciones que pueden realizarse sobre ellos, como son la suma de tensores, producto de un tensor por un vector, producto de tensores y otras. Tal que:

- La suma de tensores se denota como $R = T + S = T_{ij} + S_{ij}$, o bien como $R_{ij} = T_{ij} + S_{ij}$.
- El producto tensor, vector es definido como $\mathbf{b} = T \mathbf{a}$, tal que $b_i = T_{ip} a_p$.
- El producto tensor, tensor es dado por $R = T \cdot S$, tal que $R_{ij} = T_{ip} \cdot S_{pj}$.

Para introducir el concepto derivada en las expresiones utilizando la notación indicial, se anexa a la expresión una coma y la definición de la variable respecto a la cual se aplica la derivada. De manera, que se pueden tener expresiones como:

- Gradiente de una función escalar: $a = \text{grad}[f]$, tal que $a_i = f_{,i}$.
- Gradiente de una función vectorial: $T = \text{grad}[a]$, tal que $T_{ij} = a_{i,j}$.
- Divergencia de un vector: $F = \text{div}(\mathbf{a})$, tal que $F_i = a_{,i}$.
- Divergencia de un tensor: $a = \text{div}(T)$, tal que $a_i = T_{ip,p}$.

Al igual puede ser empleado en matrices como es para el caso del cálculo de un determinante de una matriz dada. De manera, que $\det(T) = \varepsilon_{kpq} T_{1p} T_{2q} T_{3k}$.

